HUGO STEINHAUS.

O mierzeniu pól płaskich.

Według definicji podanej przez C. Jordana otrzymuje się pole figury płaskiej kładąc ją na siatce kwadratowej i sumując pola tych kwadratów, których wnętrza leżą całkowicie we wnętrzu figury, poczem oblicza się wartość graniczną tak otrzymanych sum, gdy siatka staje się coraz to gęstsza t. j. gdy bok oczka dąży do zera. Pole kwadratu jest określone regułą elementarną: długość boku w drugiej potędze.

Niniejszy artykuł traktuje następującą kwestję praktyczną związaną z pomiarem pól:

Jak obliczać pole nie zmieniając siatki kwadratowej?

W praktyce ma się często do czynienia z pomiarem pól, których kontur jest dany graficznie (rysunek, mapa, zdjęcie fotograficzne). Jeżeli wykres ten pokryjemy kalką, na której wyrysowana jest siatka kwadratowa, albo jeżeli sam kontur jest wyrysowany na kalce, pod którą podłożono siatkę kwadratową (np. siatkę o boku ½ cm, w którą zaopatrzone są często zeszyty lub bloki) to bardzo łatwo przeliczyć kwadraty wewnętrzne. Chodzi jeszcze tylko o to, jak uniknąć zagęszczania siatki wymaganego definicją Jordana.

I. **Twierdzenie.** Pole wieloboku (o nieprzecinających się bokach), którego wierzchołki leżą na węzłach[1]) siatki kwadratowej jest równe dokładnie

$$n a^2$$

jeżeli a^2 oznacza pole jednego kwadracika siatki zaś n liczbę węzłów leżących wewnątrz wielokoku; przy liczeniu trzeba jednak uwzględnić węzły leżące na samym konturze zastępując je małemi kółeczkami i licząc jako leżącą wewnątrz wie-

[1]) Proste, składające się na siatkę nazywamy nitkami, ich punkty przecięcia węzłami, kwadraciki oczkami.

loboku ułamkową część węzła odpowiadającą leżącemu wewnątrz wieloboku wycinkowi kółeczka.

Przykład: Kładąc na siatce kwadrat o boku a wierzchołkami na węzły wyliczymy n jako

$$\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}=1,$$

zatem Tw. I. da $1 . a^2$ jako pole kwadratu zgodnie z regułą elementarną.

Dowód. *a)* Sprawdzimy, że twierdzenie I. jest prawdziwe dla wieloboku P, o ile jest prawdziwe dla wieloboków P_1 i P_2 powstałych przez dorysowanie przekątni przebiegającej wewnątrz P. W samej rzeczy, założenie daje

$$P_1 = n_1 a^2, \quad P_2 = n_2 a^2$$

przyczem n_1 (n_2) oznacza liczbę węzłów leżących wewnątrz P_1 (P_2). Ale liczba n węzłów (całych i ułamkowych odpowiednio liczonych) padających wewnątrz P jest oczywiście równa $n_1 + n_2$, zaś

$$P = P_1 + P_2 = n_1 a^2 + n_2 a^2 = (n_1 + n_2) a^2$$

a więc (wobec $n_1 + n_2 = n$)

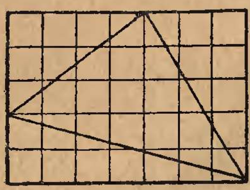
$$P = n a^2 \qquad \text{c. b. u.}$$

b) Twierdzenie jest prawdziwe dla kwadratu o boku a leżącego wierzchołkami na węzłach, jak uczy *przykład;* według *a)* jest zatem prawdziwe dla każdego prostokąta złożonego z dwóch a tak samo z trzech i t. d. kwadracików ułożonych rzędem. Z takich rzędów złożyć można prostokąt dwa, trzy i t. d. razy szerszy; do niego będzie według *a)* także się stosowało twierdzenie. A więc twierdzenie ważne jest dla dowolnego prostokąta, którego boki są nitkami siatki.

c) Rysując w prostokącie takim przekątnię zauważymy, że pole każdego z 2 powstałych trójkątów jest równe połowie pola prostokąta i że ze względu na symetrję, liczba węzłów wewnątrz trójkąta jest równa połowie liczby węzłów w prostokącie. Stąd i z *b)* wynika prawdziwość twierdzenia dla trójkąta prostokątnego, którego przyprostokątnie są nitkami a wierzchołki węzłami siatki.

d) Z *a)* wynika, że o ile twierdzenie jest prawdziwe dla wieloboku P i dla jednego (P_1) z wieloboków otrzymanych przez dorysowanie przekątni wewnętrznej, to jest prawdziwe dla drugiego wieloboku (P_2).

e) c) d) i figura uczy, że twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego trójkąta o wierzchołkach węzłowych.



f) Z *e)* i *a)* wynika prawdziwość twierdzenia I. Można bowiem przez kolejne rysowanie przekątni wewnętrznych rozłożyć każdy wielobok na trójkąty (z których każde dwa są wobec siebie zewnętrzne).

Uwaga. Obliczanie ułamków węzłów upraszcza się, jak następuje. Węzły wierzchołkowe liczą się jako: $\dfrac{\text{kąt wierzchołkowy}}{\text{kąt pełny}}$; suma ich jest w k-boku równa

$$\frac{\text{suma kątów wierzch.}}{\text{kąt pełny}} = \frac{\pi(k-2)}{2\pi} = \frac{k}{2} - 1.$$

Węzły boczne liczą się jako $\frac{1}{2}$. Stąd prosta

Reguła: Pole równa się na^2, przyczem n otrzymuje się licząc węzły wewnętrzne pojedyńczo, węzły na konturze jako połówki i zmniejszając tak otrzymaną sumę o 1.

II. Twierdzenie. Pole dowolnej[1]) figury płaskiej otrzymuje się przesuwając ją ustawicznie o wektor w, którego obie składowe są niewspółmierne względem boku oczka siatki i względem siebie i biorąc za liczbę n we wzorze

$$P = na^2$$

granicę

$$\lim_{k \to \infty} \frac{n_1 + n_2 + \dots n_k}{k},$$

przyczem liczba n_j ($j = 1, 2 \dots$) oznacza liczbę węzłów padających we wnętrze figury po przesunięciu jej na nieruchomej siatce o jw.

Dowodu nie będziemy tutaj podawać. Polega on na następującem twierdzeniu opublikowanem w r. 1914 przez pp. G. H. Hardy'ego i J. E. Littlewooda[2]):

---

[1]) „Dowolna“ figura płaska jest to taki zbiór płaski, który posiada pole według definicji Jordana.

[2]) Acta Mathematica, tom 37, str. 155—190. „Some problems of Diophantine approximation“. Patrz str. 164, *(b)* i adnotację 2 na tejże stronie.

(T). Dowolny obszar ω położony w kwadraciku siatki zajmuje — w stosunku do pola kwadracika — pole wyrażające się granicą

$$\lim_{k \to \infty} \frac{n_1 + n_2 + \dots n_k}{k}$$

przyczem n_j oznacza liczbę 0 lub 1, według tego czy koniec wektora jw nie pada lub pada w ω względnie w jeden z obszarów ω', ω''... otrzymanych przez umieszczenie w *każdem* oczku obszaru homologicznego do ω; w ma mieć własności z hipotezy twierdzenia II. Autorowie angielscy (loc. cit.) nazywają twierdzenie (T) znanem i każą szukać dowodu i odnośników w zapowiedzianej książce H. Bohra i J. E. Littlewood'a[1]).

Twierdzenie II. pozwala w następujący sposób mierzyć pole figury wyrysowanej na kalce przy użyciu papieru kratkowanego o kratce $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\,\text{cm}^2$.

Kreśli się na siatce linję prostą L na której oznacza się ciąg punktów A_1, A_2... A_k... odległych o $1/2$ cm. (Do tego można użyć tegoż papieru kratkowanego, kładąc jeden arkusz skośnie na drugim i przebijając szpilką punkty — czynność ta zajmuje mało czasu a ponadto raz wykonana służy przy następnych pomiarach). Kierunek linji L łatwo obrać zgodnie z założeniem Tw. II. (Np. sama siatka daje długość $\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$, $\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2}$ cm, a stąd linję o nachyleniu $\left.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$. Na kalce oznacza się dwa punkty PQ (odległe np. o $6 \times \frac{1}{2} = 3$ cm) i przesuwa się kalkę tak by PQ padły naprzód na $A_1 A_7$ potem na $A_2 A_8$... i t. d. Za każdym razem liczy się węzły widzialne w polu figury a sumę tych liczb dzieli się wkońcu przez poczwórną liczbę pozycji. Iloraz daje w przybliżeniu pole w cm kwadratowych.

Uwoga a). Liczenie węzłów można zmechanizować zapomocą liczydełka umieszczonego na trzonku, tak aby każde uderzenie trzonka o papier posuwało liczydło o 1. Wtedy zamiast liczyć węzły wystarczy uderzać je trzonem liczydła. Jeżeli pozycji było 10 (15, 20, 25) to musimy dzielić potem

---

[1]) „The Riemann Zeta-function and the Theory of Prime Numbers" (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics). Nie wiadomo mi, czy książka ta wyszła.

przez 40 (60, 80, 100) co uskutecznia się natychmiast. Węzły wątpliwe t. j. leżące na brzegu figury trzeba naprzemian nie liczyć i liczyć. Tak uzyskany planimetr ma tę zaletę, że nie wymaga mierzenia i sprowadza wszystko do liczenia. Zasada jego przypomina nonjusz.

Uwaga β). Ważną teoretycznie i praktycznie jest kwestja dokładności pomiaru.

Przy danej figurze opisane wyżej postępowanie daje przybliżenie zależne od liczby pozycji k i od wektora w. Badanie kwestji przybliżenia zaprowadziłoby nas poza ramy niniejszego artykułu. W wypadku 1-wymiarowym (a więc prostszym niż nasz przedmiot) znalazł A. Chińczyn[1]), że przybliżenie można uczynić bardzo złem przez niezręczny wybór wektora w i że przy danej figurze (figura = zbiór linjowy mierzalny J) *prawie* każdy wektor w daje aproxymację rzędu $\frac{C(\log k)^{1+\varepsilon}}{k}$, przyczem ε jest dowolną liczbą dodatnią a C jest stałą zależną od ε, od figury i od w, zaś niezależną od k. — Łatwo znaleźć proste figury, dla których rząd przybliżenia przy żadnem w nie może być lepszy niż $\frac{1}{k}$. — W praktyce trzeba po obraniu linji L i ustaleniu liczby pozycji (k) tak rozmieścić punkty A'_1, $A'_2 \ldots$ t. zn. tak obrać ich wzajemną odległość, aby punkt A'_{k+1} leżał z dużem przybliżeniem homologicznie z A'_1. W tym celu trzeba zamiast pierwotnego ciągu A_1, $A_2 \ldots$ użyć nowego A'_1, $A'_2 \ldots$ powstałego przez uwzględnienie tylko tych A_r, których wskaźniki należą do pewnego postępu arytmetycznego.

Uwaga γ). Dla celów praktycznych byłoby pożądanem wykształcenie powyższej metody tak by można jej użyć do obliczania *momentów* figur płaskich.

Résumé.

Sur la quadrature des aires.

En appliquant un théorème dû à MM Hardy et Littlewood[2]) on démontre qu'en se servant d'un grillage quadratique

[1]) Mathematische Zeitschrift, tom 18 (1923) str. 289—306. „Ein Satz über Kettenbrüche, mit arithmetischen Anwendungen".

[2]) loc. cit.

donné on peut évaluer l'aire d'une figure plane quelconque avec une approximation illimitée. A ce but on trace sur un plan (papier) 1) un réseau quadratique 2) une droite oblique qui fait avec une droite du réseau un angle à tangente irrationelle 3) on marque sur la droite oblique des points équidistants de manière que les projections des segments s ainsi obtenus sur les droites du réseau soient irrationelles par rapport aux côtés a de carrés. Ceci fait une fois pour toutes on dessine le contour limitant la figure donnée sur du papier transparent et on le deplace le long de la droite oblique de $1.s, 2s, \ldots (k-1)s$. Soit n_i le nombre qui indique combien des points nodaux du réseau tombent à l' intérieur du contour quand il a été déplacé de $(i-1)s$; l'expression $\frac{a^2}{k}\sum_{i=1}^{k} n_i$ tend vers l'aire cherchée, quand k tend vers ∞. Tout k fini fournit donc une aire approchée.